Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Акушерский колледж»

Методический кабинет

Рассмотрена на заседании **ЦМК ООД**
«_____»_____2020г
Протокол №_____
Председатель ЦМК Артемьева С.Г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Методист
_____Лутошкина Т.А..
«____»_____2020г

ФИО преподавателя: Кормилкина Е.В.

Тема:

«ПОВТОРЕНИЕ 5-9».

в трех частях

Часть 2

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТА

Студенту

Учебная дисциплина: Математика: Алгебра и начала математического анализа; геометрия.
Курс__I ___

Специальность: 31.02.02 «Акушерское дело»

Санкт-Петербург
2020

ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА ЗА 7 класс

Оглавление

Алгебраические выражения 3
Алгоритм 1. Порядок выполнения действий. 3
Алгоритм 2. Правила раскрытия скобок. 3
Алгоритм 3. Правила расстановки скобок. 3
Правило вынесения за скобки знака «-». 3
Уравнения 3
Алгоритм 4. Решения линейного уравнения. 4
Степень с натуральным показателем. 4
Свойства степени с натуральным показателем. 5
Стандартный вид числа. 6
Одночлены и многочлены 6
Алгоритм 5. Приведения многочлена к стандартному виду. 6
Алгоритм 6. Умножение многочлена на одночлен 6
Алгоритм 7. Умножение многочлена на многочлен 7
Разложение многочленов на множители 7
Метод вынесения общего множителя 7
Алгоритм 8. Нахождение общего множителя для всех членов многочлена 7
Метод группировки 7
Алгоритм 9. Метода группировки 7
Использование формул сокращенного умножения при разложении на множители 7
Алгебраические дроби 8
Алгоритм 10. Сложения и вычитания алгебраических дробей 9
Алгоритм 11. Умножение и деление алгебраических дробей 9
Координатная плоскость , функция. 10
Алгоритм 12. Нахождение нулей функции без графика 10
Алгоритм 13. Нахождение нулей функции по графику 10
Алгоритм 14. Нахождение промежутков знакопостоянства по графику 10
Алгоритм 15. Нахождение промежутков знакопостоянства без графика 11
Линейная функция и ее график 11
Система двух уравнений с двумя неизвестными 12
Алгоритм 16.Выражения одной переменно через другую. 12
Алгоритм 17.Способ подстановки 13
Алгоритм 18. Способ сложения. 13
Алгоритм 19. Графический способ 14

Алгебраические выражения

Числовым выражением называется соединение чисел знаками действий и скобками.
Алгебраическим выражением называется соединение чисел и букв знаками действий и скобками.

Операции сложения и умножения действительных (а значит, в том числе и натуральных, и целых) чисел обладают следующими свойствами:
$a + b = b + a$ (переместительный закон сложения).
$(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения).
$ab = ba$ (переместительный закон умножения).
$(ab)c = a(bc)$ (сочетательный закон умножения).
$a(b + c) = ab + ac$ (распределительный закон умножения относительно сложения).

Алгоритм 1. Порядок выполнения действий.

Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключёнными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в следующем порядке:

1. действия третей ступени (возведение в степень, извлечение корня)
2. действия второй ступени (умножение и деление)
3. действия первой ступени (сложение и вычитание)

Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе и знаменателе и первый результат делится на второй.

Алгоритм 2. Правила раскрытия скобок.

1. Если перед скобками стоит знак «+», то просто не пишите скобки.
   $3a-4b+(2ab-c) = 3a-4b+2ab-c$
2. Если рядом получились два знака «+» и «-», то знак «+» не пишите.
   $3a+(-4b+2ab-c) = 3a \cancel{+} -4b+2ab-c = 3a-4b+2ab-c$
3. Если перед скобками стоит знак «-», все знаки у слагаемых которые стояли в скобках, замените на противоположные.
   $3a-(4b+2ab-c) = 3a-4b-2ab+c$

   $3a-(-4b+2ab-c) = 3a+4b-2ab+c$

Алгоритм 3. Правила расстановки скобок.

1. Возьмите в скобки все слагаемые, которые нужно заключить в скобки, включая знаки при них.
2. Поставьте перед скобками знак «+»
   $3a-4b+2ab-c = 3a-4b+(+2ab-c) = 3a-4b+(2ab-c)$
   $3a-4b+2ab-c = 3+(-4b+2ab-c)$

Правило вынесения за скобки знака «-».

Вынести за скобки знак «-», это значит разделить все слагаемые в скобках на (-1).
При вынесении за скобки знака «-» все знаки у слагаемых, которые заключаются в скобки, нужно изменить на противоположные.
$3a-4b+2ab-c = 3-(+4b-2ab+c) = 3-(4b-2ab+c)$

Уравнения

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестное, обозначенное буквой.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.
Корень уравнения это число, при подстановке которого вместо неизвестного получается верное числовое равенство.
Например: 7 корень уравнения $3x$ -10=11, так как при подстановке вместо x числа 7 , получим $3\cdot 7$ -10=11 верное числовое равенство (слева 11, и справа 11)
Если обе части истинного равенства умножить или разделить на любое число, отличное от нуля, то получится тоже истинное равенство.
Два уравнения называются равносильными, если совпадают множества их решений, на данном числовом множестве, т.е уравнения имеют одинаковые корни.
При решении уравнений можно обе части уравнения делить или умножать на число отличное от нуля и переносить слагаемые из одной части уравнения в другую.
Если обе части уравнения умножить или разделить на любое число, отличное от нуля, то получим уравнение равносильное данному.
При переносе слагаемого из одной части уравнения в другую, знак у слагаемого меняется на противоположный.
Уравнение вида $ax + b = 0$, где x - переменная, a и b - некоторые действительные числа, называется линейным уравнением. В линейном уравнений переменная имеет степень не больше 1.
Если $a\neq 0$, то линейное уравнение имеет одно решение.

- ⚠ Чтобы понять является ли уравнение линейным, нужно перемножить все скобки, упростить все и привести уравнение к стандартному виду.
- ⚠ Стандартный вид уравнения: упрощенное алгебраическое выражение в – левой части, справа - 0

Алгоритм 4. Решения линейного уравнения.

1. Если уравнение содержит дроби, у которых в числителе есть x, а знаменатель – число, найдите общий знаменатель дробей и умножьте на него левую и правую части.
   ■ *Пример:* $\frac{8+5x}{7}+\frac{3x-4}{8}=x+1 \quad | \cdot 56$
   $$8\cdot(8+5x)+7\cdot(3x-4)=(x+1)\cdot 56$$
2. Раскройте все скобки.
   $64+40x+21x-28=56x+56$
3. Соберите все слагаемые в левой части. При переносе в другую часть, знак у слагаемого меняется на противоположный.
   $64+40x+21x-28-56x-56=0$
4. Приведите подобные слагаемые.
   $5x-20=0$
5. Если получилось 0=0 (или $0\cdot x=0$), то решение x – любое число.
6. Перенесите число в правую часть, изменив у него знак, на противоположный. Если получился слева 0 (или $0\cdot x$), а справа - число отличное от нуля, то уравнение решения не имеет.
   $5x = 20$
7. Разделите обе части уравнения на коэффициент при x.
   $x = 4$

Степень с натуральным показателем.

Степенью числа a с натуральным показателем n ,где $n \in N$, a –любое действительное число, называется произведение n,множителей, каждый из которых равен a.

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$$

показатель степени

$$a^n=b$$

значение степени

основание степени

Вычисление значения степени называют действием возведения в степень

■ *Например:* $5^3=5\cdot5\cdot5=125$; $5^1=5$

Таблица степеней некоторых чисел.

n	**2^n**	**3^n**	**5^n**
0	1	1	1
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3125
6	64	729	15625
7	128	2187	78125
8	256	6561	390625
9	512	19683	1953125
10	1024	59049	9765625

Свойства степени с натуральным показателем.

	Формулы действуют и в обратную сторону.
1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a\neq0)$ $3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются: $a^m : a^n = a^{m-n}$ $3^3 : 3^2 = 3^{3-1} = 3^1 = 3$	$a^{m-n} = a^m : a^n$
3. При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ $(2^2)^3 = 2^{2\cdot3} = 2^6$	$a^{m\cdot n} = (a^m)^n$
При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $(2\cdot3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
При возведении дроби в степень следует в эту степень возвести и числитель и знаменатель $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^m}$ $(b\neq0)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3}$	$\frac{a^n}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$0^n=0$	

$1^n=1$	

Стандартный вид числа

Число считается записанным в стандартном виде, если оно записано в виде $a*10^n$,
1≤ *a* <10 *a* є Z, где , *n* – называют порядком числа.
■ *Например*: 350 может быть записано как $3,5 \cdot 10^2$

Одночлены и многочлены

1. Произведение числовых и буквенных множителей называют одночленом

■ *Например*: $-a^3b^2$; $0,5c^3$; $-8a^3x^2$
Выражения $x+1$; $a-8a^3x$ не являются одночленами, так как представляют сумму

2. Стандартным видом одночлена называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных. Например, -2, a, x^4, y^5 , — $-8a^3x^2$, $\frac{3}{5}a$ — одночлены стандартного вида
3. Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных. Например, $8x^4y^2$ — одночлен шестой степени, степень одночлена $3x$ равна единице, а степень одночлена 5 равна нулю.

4. Одночлены, которые отличаются друг от друга только коэффициентами, называют подобными
■ *Например*: $-8a^3x^2$ *и* $3a^3x^2$-подобные.
5. Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом.
Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется многочленом стандартного вида. Например, $2x^2a^3 + 1,8xa^4 - 3a + 7$ — многочлен стандартного вида.
6. Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен. Например, $1 + 2x^2 - 5x^2y^3$ — многочлен пятой степени.
7. Сумму подобных членов можно заменить одним членом, сложив их коэффициенты и оставив ту же буквенную часть. Такое тождественное преобразование многочленов называют приведением подобных членов.
■ *Например:* в многочлене $5ab^2c^3 + 6ab^2c^3 - ab$ члены $5ab^2c^3$ и $6ab^2c^3$ являются подобными слагаемыми, так как они имеют одну и ту же буквенную часть.
8. Чтобы привести подобные слагаемые, достаточно сложить их коэффициенты (по правилу сложения положительных и отрицательных чисел, и полученное число умножить на буквенное выражение (буквенное выражение не меняется!).

Алгоритм 5. Приведения многочлена к стандартному виду.

Для того чтобы преобразовать сумму или разность многочленов в многочлен стандартного вида, надо:
1) раскрыть скобки;
2) привести подобные члены (слагаемые).

⚠ Раскрытие скобок. Если перед скобками стоит знак «плюс», то, раскрывая скобки, следует сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки. См. алгоритм 2
Если перед скобками стоит знак «минус», то, раскрывая скобки, надо знаки слагаемых поменять на противоположные. См. алгоритм 2

■ *Например:* $(5x^2-4x+3)-(3x^2-x+2)=5x^2-4x+3-3x^2+x-2=2x^2-3x+1.$

Алгоритм 6. Умножение многочлена на одночлен

1. Каждый член многочлена умножьте на одночлен и полученные произведения сложите.
2. Приведите одночлены к стандартному виду.

■ *Например:* $5x(x-y) = 5xx - 5xy = 5x^2 - 5xy$

Алгоритм 7. Умножение многочлена на многочлен

1. Каждый член первого многочлена умножьте на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложите.
2. Приведите одночлены к стандартному виду
3. Подчеркните подобные члены
4. Приведите подобные члены

■ *Например:* $(2x+y)(x—y) = 2xx - 2xy + xy - y^2 = 2x^2 - 2\underline{xy} + \underline{xy} - y^2 = 2x^2 - xy - y^2$

⚠ Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член одного многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить

Разложение многочленов на множители

Разложить на множители алгебраическое выражение - это значит представить алгебраическое выражение в виде произведения каких-то сомножителей отличных от 1.

Метод вынесения общего множителя

Алгоритм 8. Нахождение общего множителя для всех членов многочлена

Разложить на множители $3a^3x^2+6xa^2b+9x^3a^2c$

1. Если коэффициенты многочлена целые числа, запишите наибольший общий делитель коэффициентов одночленов
   3, т.к НОД(3,6, 9)=3
   Иначе просто найдите общий делитель коэффициентов
2. Среди степеней с одинаковыми основаниями выберите все степени с наименьшими показателями. $3a^2x$
3. Получили одночлен являющийся общим множителем для членов многочлена.

Если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобку. При этом в скобках останется результат деления многочлена на общий множитель.

$3a^3x^2+6xa^2b+9x^3a^2c = 3a^2x(x+2b+3xc)$

Метод группировки

К многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена, при разложении их на множители обычно применяют способ группировки.

Алгоритм 9. Метода группировки

Разложить на множители $2x+ac+cx+2a$

1. Объединить члены, из которых можно вынести общий множитель, в группы.
   $2x+ac+cx+2a = (2x+2a)+(ac+cx)$
2. Из каждой группы вынести общий множитель
   $2x+ac+cx+2a = (2x+2a)+(ac+cx)=2(x+a)+ c\,(a+x)=$
3. Если после этого появился общий множитель у каждой из объеденных групп, вынести его за скобки.
   $2x+ac+cx+2a = (2x+2a)+(ac+cx)=2\underline{(x+a)} + c\,\underline{(a+x)} = (x+a)(2+ c)$

Использование формул сокращенного умножения при разложении на множители

<u>Формулы сокращенного умножения</u>:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ - разность квадратов

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - квадрат суммы

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ - квадрат разности

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ - куб суммы

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ - куб разности

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ - сумма кубов

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ - разность кубов

Эти формулы нужно уметь применять как слева направо, так и наоборот.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ - разность квадратов

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ - квадрат суммы

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ - квадрат разности

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ - куб суммы

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$ - куб разности

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ - сумма кубов

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ - разность кубов

Используя эти формулы, некоторые многочлены можно раскладывать на множители. А так же можно легко возводить в квадрат перемножать некоторые числа.

■ *Например:*

$9a^2 - 16 = (3a)^2 - 4^2 = (3a-4)(3a+4)$

$x^2 - 8ax + 16a^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4a + (4a)^2 = (x-4a)^2 = (x - 4a) \cdot (x - 4a)$

$-4 - 4a - a^2 = -(4 + 4a + a^2) = -(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a + a^2) = -(2+a)^2 = -(2 + a) \cdot (2 + a)$

$79^2=(70+9)^2=70^2+2\cdot70\cdot9+9^2=4900+1260+81=6241$

$36\cdot44=(40-4)\cdot(40+4)=40^2-4^2=1600-16=1584$

Алгебраические дроби

Если в дроби $\frac{a}{b}$ a и b - алгебраические выражения (или хотя бы одно из них) , то $\frac{a}{b}$ -

■ *Пример:* $\frac{3a - a(a+2)}{5a^2 + 4}$ - алгебраическая дробь.

1. Если значение знаменателя дроби равно нулю, то дробь не определена или не имеет значения, или не существует.

■ *Например:* Выясните, при каких x дробь $\frac{4x-3}{2x+6}$ существует.

Дробь нельзя вычислить, если знаменатель равен 0, т.е. $2x + 6 = 0$;
Решив уравнение, получаем $x = -3$. Следовательно при $x = -3$ дробь не определена или не существует. Вывод: Дробь существует при любом значении x, кроме $x = -3$.

2. Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель дроби не равен нулю.
3. Для того, чтобы сократить дробь, необходимо предварительно разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

■ *Например:*

1) $\frac{8xy}{12xb} = \frac{2y}{3b}$.

2) $\frac{33(x-3y)}{77(3y-x)} = \frac{-33(3y-x)}{77(3y-x)} = -\frac{33}{77} = -\frac{3}{7}$.

3) $\frac{-6pg+20p}{3g-10} = \frac{-2p(3g-10)}{3g-10} = -2p$.

4) $\frac{5xy-5x^2}{xy^2-x^2y} = \frac{5x(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{5}{y}$.

5) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{1}{x-y}$.

⚠ ***Внимание!*** Сокращать можно только множители.

⚠ При сокращении делить числитель и знаменатель нужно на множитель степень которого имеет меньший показатель.

⚠ Сложение, вычитание , умножение и деление алгебраических дробей происходит по тем же правилам, что и сложение, вычитание , умножение , деление обыкновенных дробей

Алгоритм 10. Сложения и вычитания алгебраических дробей

Складывать можно дроби только с одинаковыми знаменателями!

Чтобы найти общий знаменатель алгебраических дробей:

1. Разложите знаменатели дробей на множители.
2. Составьте из множителей дробей общий знаменатель.
3. Напишите дополнительные множители к каждой дроби.
4. Умножьте дополнительные множители на числители дробей, записав все над одной чертой
5. В знаменателе запишите общий множитель
6. Выполните умножение многочленов, результаты запишите в скобках
7. Раскройте скобки в числителе и упростите числитель

⚠ ***Внимание!*** Если у дроби в знаменателе множитель вида (*a*-*b*), то чтобы получить множитель вида (*b*-*a*), поменяйте знак перед дробью на противоположный, а знаменатель на (*b*-*a*)

■ *Например:*

1. $\frac{3x-2}{x-1} + \frac{4x+3}{x-1} = \frac{3x-2+4x+3}{x-1} = \frac{7x+1}{x-1}$

2. $\frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \frac{3x+6}{x+2} = \frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 3.$

3. $\frac{2x}{3x-9} - \frac{4x+1}{9-3x} + \frac{7-3x}{3x-9} = \frac{2x}{3(x-3)} - \frac{4x+1}{3(3-x)} + \frac{7-3x}{3(x-3)} = \frac{2x}{3(x-3)} + \frac{4x+1}{3(x-3)} + \frac{7-3x}{3(x-3)} =$

$= \frac{2x+4x+1+7-3x}{3(x-3)} = \frac{3x+8}{3(x-3)}$.

Алгоритм 11. Умножение и деление алгебраических дробей

Для того чтобы наиболее рационально перемножить две дроби, необходимо

1. Разложить на множители числитель и знаменатель каждой дроби.
2. Сократить одинаковые множители в числителе и знаменателе

■ *Например:*

2. $\frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{y^2+xy}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x-y)}\, y\, \cancel{(y+x)}}{x\, \cancel{(x+y)}\, (x-y)^{\cancel{2}}} = \frac{y}{x(x-y)}$.

1. $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^2}{5ab^2} = \frac{8 \cdot 36 \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2}{9 \cdot 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot c} = \frac{32ac}{5b}$.

Чтобы разделить дробь на дробь, необходимо умножить первую дробь на дробь, обратную второй дроби, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель каждой дроби.

■ *Например:*

1. $\frac{46x^2c}{15a} : \frac{23xc^2}{5a^2} = \frac{46x^2c}{15a} \cdot \frac{5a^2}{23xc^2} = \frac{46 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot c \cdot a^2}{15 \cdot 23 \cdot a \cdot x \cdot c^2} = \frac{2xa}{3c}$.

2. $\frac{a+b}{9a^2b^3} : \frac{a^2-b^2}{27ab^2} = \frac{a+b}{9a^2b^3} \cdot \frac{27ab^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{9a^2b^3} \cdot \frac{27ab^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b) \cdot 27ab^2}{9a^2b^3(a+b)(a-b)} = \frac{3}{ab(a-b)}$.

Координатная плоскость , функция.

1. Термин «координаты» произошел от латинского слова – «упорядоченный»
2. Чтобы указать положение точки на плоскости берут две перпендикулярные прямые Х и У.
3. Ось ОХ – ось абсцисс
4. Ось ОУ- ось ординат
5. Точка О- начало координат
6. Плоскость, на которой задана система координат, называется координатной плоскостью.
7. Каждой точке М на координатной плоскости соответствует пара чисел: её абсцисса и ордината. Наоборот, каждой паре чисел соответствует одна точка плоскости, для которой эти числа являются координатами.
8. Точки, в которых функция пересекает ось абсцисс называются **нулями функции.**

Алгоритм 12. Нахождение нулей функции без графика

1. Приравняйте функцию к нулю.

■ *Например:* Дана функция $y(x) = 2x^3 + 6x^2$

$2x^3 + 6x^2=0$

2. Решите получившееся уравнение.

$2x^3 + 6x^2=0$

$2x^2(x+3)=0$

$2x^2=0$ или $x+3=0$

$x_1 =0$ или $x_2= -3$

Ответ: 0; -3-нули функции

Алгоритм 13. Нахождение нулей функции по графику

1. Найдите точки, в которых функция пересекает ось ОХ
2. Запишите значения этих точек по оси ОХ

9. Промежутки, на которых функция имеет постоянный знак (положительный или отрицательный) называются **промежутки знакопостоянства.** Промежуток положительного знака — это множество значений переменной x, у которых соответствующие значения функции больше нуля ($y>0$).

Алгоритм 14. Нахождение промежутков знакопостоянства по графику

Функция положительна $y(x)>0$:

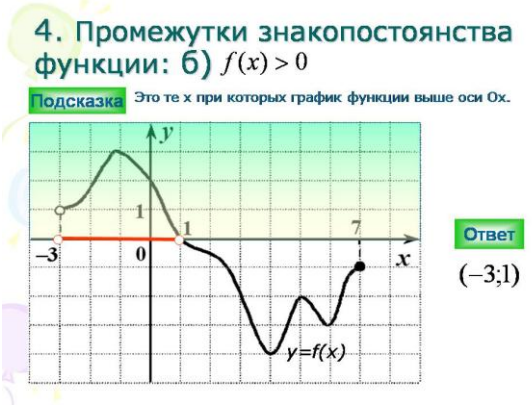
1. Заштрихуйте верхнюю полуплоскость.
2. Обведите те куски функции, которые находятся в заштрихованной области.
3. В круглых скобках запишите левое, а затем правое значение первого куска функции (значения смотреть на оси ОХ), проделайте это для каждого куска.

Функция отрицательна $y(x)<0$:

1. Заштрихуйте нижнюю полуплоскость.

2. Обведите те куски функции, которые находятся в заштрихованной области.
3. В круглых скобках запишите левое, а затем правое значение первого куска функции(значения смотреть на оси ОХ), проделайте это для каждого куска.

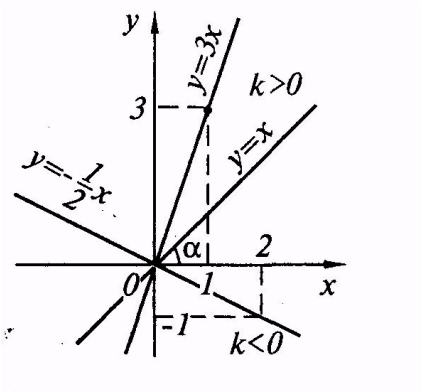
⚠ ***Внимание!*** Если слева 1-ый кусок функции неограничен, то левое значение -∞
Если самый правый 1-ый кусок функции неограничен, то правое значение +∞



Алгоритм 15. Нахождение промежутков знакопостоянства без графика

Функция положительна $y(x)>0$
1. Составьте неравенство: [формула, которой задана функция]>0
2. Решите неравенство.
Функция отрицательна $y(x)<0$:
1. Составьте неравенство: [формула, которой задана функция]<0
2. Решите неравенство.

Линейная функция и ее график



1. Если переменные x и y прямо пропорциональны, т.е. во сколько раз увеличивается x во столько же раз увеличивается и y , то зависимость y от x называется прямой пропорциональностью и описывается формулой $y= kx$.

⚠ ***Замечание.*** Если при увеличении значения переменной x в несколько раз, значение переменной y уменьшится во столько же раз, то зависимость y от x называется обратной пропорциональностью и описывается формулой $y = \frac{k}{x}$

2. График функции $y= k x$ –прямая проходящая через начало координат ($k\neq0$).
3. Функция, заданная формулой $y = kx+b$, где k *и* b — некоторые числа, называется линейной.
4. Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = kx$ с положительным направлением оси Ox (рис. 24), поэтому k называется угловым коэффициентом. Если $k >0$, то этот угол острый; если $k <0$ — тупой; если $k = 0$, то прямая совпадает с осью Ox.
5. Областью определения линейной функции служит множество R всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях x.
6. Областью значений линейной функции служит множество R всех действительных чисел
7. График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая линия. Для построения графика, очевидно, достаточно двух точек..
8. Чтобы найти значение функции (координату по оси ОУ) в точке x_0 нужно подставить в уравнение функции значение x_0, и сосчитать.
■ *Например:* функция задана формулой $y(x) = 2x^3 + 5x^2-1$
$x_0=1$, $y(1) = 2\cdot1^3 + 5\cdot1^2-1=2+5-1=6$

9. График функции $y=kx + b$ может быть также построен с помощью параллельного переноса графика функции $y = kx$ вдоль оси ОУ на b единиц вверх при $b>0$,вниз при $b<0$.

10. Уравнение вида $kx+b = 0$ называется линейным. Для того чтобы решить линейное уравнение графически, достаточно построить график функции $y = kx+b$ и найти точку его пересечения с осью Ox (корень уравнения). Точки пересечения любой функции с осью Оx, называются **нулями функции.**

11. Типовое задание.

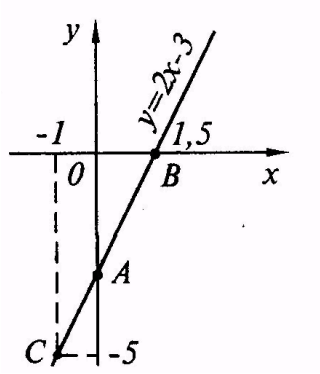
а) Постройте график функции $y=2x-3$

б) При каком значении x значение y равно -5?

в) Укажите значения x, при которых $y < 0$.

г) Укажите значения x, при которых $y>0$.

д) Укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.



Решение:

а) Графиком функции является прямая. Для построения найдем две точкам, которые расположены, не очень близко, тогда построение будет более точным. Например:

x	0	3
y считаем по формуле $y=2x-3$	-3	3

б) для ответа на вопрос нужно в формулу, которой задана функция, вместо y подставить -5, и решить получившееся уравнение. Ответ: $x = -1$ (по графику точка С)

в) $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1,5)$ — график функции лежит ниже оси ОХ.

г) $y > 0$ при $x \in (1,5; +\infty)$ — график функции лежит выше оси ОХ.

д) С Ох точка В(1,5; 0), с Оу точка А(0; -3). Там где функция пересекает ось Оx*(нули функции)* всегда $y=0$, поэтому можно составить уравнение и решить его $0=2x-3$. Там где функция пересекает ось Оу всегда $x=0$, поэтому можно в формулу функции вместо x подставить 0 и посчитать значение функции в этой точке.

Система двух уравнений с двумя неизвестными

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеют вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – заданные числа; x, y – неизвестные. Числа a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты при неизвестных; c_1, c_2 – свободные члены.

1. Решить систему уравнений — это значит найти пару чисел $(x;y)$ при подстановке которых в уравнения получаются верные числовые равенства.
2. Система уравнений может иметь одно решение, не иметь решений или иметь бесконечное множество решений
3. Решить систему — значит найти все ее решения.
4. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.
5. Система называется **определённой**, если она имеет конечное число решений, и **неопределённой**, если она имеет бесконечное множество решений.
6. Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.
7. Существует ри способа решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Алгоритм 16.Выражения одной переменно через другую.

В уравнении $2x+5y=4$ выразить y через x:

1. Слагаемое содержащее переменную y оставить в левой части. Все остальные слагаемые из левой части перенести в правую часть.

$5y = 4-2x$

2. Разделить обе части уравнения на коэффициент при y

$$y = \frac{4-2x}{5} = 0{,}8 - 0{,}4x = -0{,}4x + 0{,}8$$

Алгоритм 17.Способ подстановки

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

1. Привести систему уравнений к системе уравнений с целыми коэффициентами, если это нужно, домножив каждое уравнение на соответствующий множитель.
2. Выбрать уравнение из которого легче выразить одну переменную ☺ через другую переменную ☻.

В данном примере из второго уравнения легко выразит переменную y.

3. Выразить переменную ☺ через переменную ☻. Второе уравнение оставить без изменения.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases};$$

4. Подставить полученное выражение в другое уравнение системы, вместо переменной.

$$\begin{cases} 2x + 3(3x - 2) = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9x - 6 = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 11x = 11 \\ y = 3x - 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

5. Решить получившееся линейное уравнение с одним неизвестным.

6. Подставить получившееся значение ☻ в первое уравнение и найти из него переменную ☺

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \cdot 1 - 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: (1; 1)

■ *Пример:*

$$\begin{cases} 26x - 15y = -45 \\ 21x + 2y = 6 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 26x - 15 \cdot \frac{6-21x}{2} = -45 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 52x - 90 + 315x = -90 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 367x = 0 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6-21 \cdot 0}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: (0; 3)

Алгоритм 18. Способ сложения.

При методе сложения одна после сложения уравнений системы или вычитания одного уравнения из другого одна переменная пропадает и получается уравнение с одной переменной.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}$.

1. Выберите переменную для коэффициентов которой легче найти НОК
НОК(7; 5)=35
2. Домножьте первое уравнение на дополнительный множитель
3. Домножьте второе уравнение на дополнительный множитель

$$\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 7 \end{array}$$

4. Получили уравнения с одинаковыми или противоположными коэффициентами при переменной.

$$\begin{cases} 35x - 10y = 5 \\ 35x + 21y = 98 \end{cases}$$

5. Если коэффициенты одинаковые, вычтите из первого уравнения второе. Если коэффициенты противоположные, сложите первое и второе уравнения.

$$\begin{array}{r} 35x - 10y = 5 \\ -\ 35x + 21y = 98 \\ \hline -31y = -93; \end{array}$$

6. Осталось уравнение с одним неизвестным. Второе уравнение оставьте любое из первоначальных двух.

$$\begin{cases} 31y = 93 \\ 7x - 2y = 1 \end{cases};$$

7. Решите уравнение с одним неизвестным

$$\begin{cases} y = 3 \\ 7x - 2y = 1 \end{cases}$$

8. Подставьте полученное значение во второе уравнение.

$$\begin{cases} y = 3 \\ 7x - 6 = 1 \end{cases};$$

9. Выразите из второго уравнении значение второго неизвестного.

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

10. Запишите ответ - пару чисел.

Ответ: (1; 3).

Алгоритм 19. Графический способ.

Графическое решение системы уравнений с двумя переменными сводится к отысканию координат общих точек графиков уравнений.

1. Постройте график функции соответствующий первому уравнению.
   Для прямой достаточно построить 2 точки. Для этого:
   1. Вместо x подставьте в уравнение любое число

2. Из получившегося уравнения найдите y
3. Отметьте на координатной плоскости точку $A_1(x; y)$
4. Аналогично найдите координаты второй точки A_2
5. Проведите через A_1 и A_2 прямую.

2. Аналогично постройте график функции соответствующий второму уравнению.
3. Найдите координаты точки пересечения графиков

■ *Например:*

Решить графическим способом систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$

1. Построим график $2x + 3y = -4$ по двум точкам, расположенным на осях ОХ и ОУ
Если точка расположена на оси ОХ, то $y=0$ и следовательно, чтобы найти x надо решить уравнение: $2x + 3\cdot 0 = -4$, откуда $x = -2$
Если точка расположена на оси ОУ, то $x=0$, и следовательно, чтобы найти y надо решить уравнение $2\cdot 0 + 3y = -4$ откуда $y = -1\frac{1}{3}$

Прямая проходит через точки с координатами (-2; 0) и $\left(0;-1\frac{1}{3}\right)$ проведем прямую см. рис. 1

2. Построим график $3x + 8y=1$ по двум точкам, расположенным на осях ОХ и ОУ
Если точка расположена на оси ОХ, то $y=0$ и следовательно, чтобы найти x надо решить уравнение: $3x + 8\cdot 0 = 1$, откуда $x = \frac{1}{3}$
Если точка расположена на оси ОУ, то $x=0$, и следовательно, чтобы найти y надо решить уравнение $3\cdot 0 + 8y = 1$ откуда $y = \frac{1}{8}$

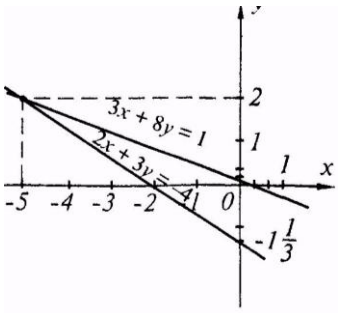


Рисунок 1

Прямая проходит через точки с координатами $\left(\frac{1}{3};0\right)$ и $\left(0;\frac{1}{8}\right)$ проведем прямую см. рис. 1

Оба графика пересекаются в точке А (-5; 2).

Система имеет единственное решение: $x = -5$, $y = 2$.

Взаимное положение прямых	**Количество решений системы**	**Отношение коэффициентов**	**Пример**
Прямые пересекаются в одной точке (x_0; y_0).	Единственное	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$
Прямые параллельны и не совпадают.	Нет решений	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$
Прямые совпадают.	бесконечное множество решений	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\begin{cases} 9x-15y=21 \\ 6x-10y=14 \end{cases}$