Метод интервалов

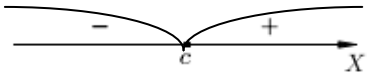
Для решения квадратных, рациональных и дробно-рациональных неравенств, применяют метод интервалов.

$6x^3 + x^2 - 2x < 0$ -пример рационального неравенства.

$\frac{-2x^2 - 11x}{(x^2 - 4x + 3)(x+1)} \geq 0$ - пример дробно-рационального неравенства

В основе метода лежит тот факт, что функция может (что происходит не всегда) поменять знак только проходя через нули функции.

В основе метода интервалов лежит простой и очевидный факт: линейный многочлен $x - c$ меняет знак с $(-)$ на $(+)$ при переходе через точку c:



Алгоритм 6. Решения неравенства методом интервалов

1. Все выражения соберите в левой части. В левой части получилась функция.
2. Найдите область определения полученной функции(область допустимых значений выражения в левой части). На числовой оси должны остаться только те числа, при которых выражение, стоящее в левой части, имеет смысл. Если конкретная точка не входит в область допустимых значений выражения, то отобразите ее на числовой оси выколотой точкой. Получили какой-то рисунок, обозначим его *(это может быть луч с выколотыми точками или прямая с выколотыми точками)..
3. Приравняйте функцию(выражение стоящее слева) к нулю и найдите корни(они называются по другому – нули функции), при которых данная функция(выражение) обращается в 0.
4. Нанесите на рисунок * полученные корни. Если неравенство строгое, точки –выколотые, если неравенство нестрогое – точки закрашенные. Получили рисунок **.
5. Выколотые и закрашенные точки разбивают область определения функции (**) на промежутки знакопостоянства функции. На каждом из этих промежутков функция имеет постоянный знак (+ или -).
6. Из каждого промежутка возьмите 1 точку и определить какой знак имеет функция в данной точке, поставьте эти знаки в соответствующие им промежутки. **Чередовать знаки просто так нельзя, так как может быть повтор знака!**

⚠ **Внимание!** Чтобы быстрее определить знак, значение подставляйте в выражение, разложенное на множители, и определяйте знак каждого множителя.

7. Выпишите промежутки соответствующие условию неравенства.

Решить неравенство: ***Пример 1.***

$(x+2)(x-3) \geqslant 0.$

1. Выражение стоящее в левой части имеет смысл при любом x.Следовательно выколотых точек не будет. Область определения функции- вся числовая ось. ⟶

2. Приравняем левую часть к 0. Решим уравнение и получим корни.

$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x-3=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

3. Наносим полученные корни кружочками на числовую ось, закрашиваем и разбиваем дугами ось на промежутки. Т.к. неравенства нестрогое, найденные корни закрашиваем. См рис**

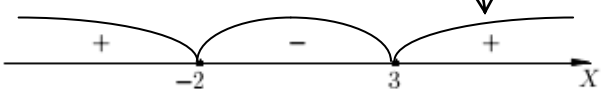
4. Из каждого промежутка берем контрольную точку и подставляем в функцию(легче определить знак, когда функция разложена на множители). Определяем знак каждого множителя и делаем вывод о знаке функции на всем промежутке. Наносим результаты (+ и -) на числовую ось. **Чередовать знаки нельзя, так как может быть повтор знака!**

**

Самый правый промежуток: x=4 (4+2)(4-3)>0 (+)

Следующий промежуток: x=0 (0+2)(0-3)<0 (-)

Следующий промежуток: x=-3 (-3+2)(-3-3)<0 (+)



5. Выписываем ответ. Данному неравенству соответствуют промежутки, где значения больше нуля, т.е. стоит знак «+». Закрашенные точки тоже в решение. **Ответ: (-∞; -2] U [3; +∞)**

Решить неравенство: ***Пример 2.*** $\frac{2}{x^2-3x-4} \geqslant \frac{3}{x^2+x-6}$.

Переносим все в левую часть приводим к общему знаменателю (множители в знаменателе не перемножаем, можем только наоборот, многочлены еще разложить на множители) и упрощаем числитель.

$$\frac{2}{x^2-3x-4} - \frac{3}{x^2+x-6} \geqslant 0.$$

$$x^2-3x-4=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1; \end{array}\right. \quad x^2-3x-4=(x-4)(x+1);$$

$$x^2+x-6=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2; \end{array}\right. \quad x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

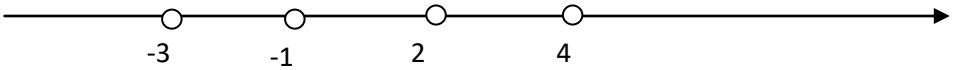
$$\frac{2(x^2+x-6)-3(x^2-3x-4)}{(x^2-3x-4)(x^2+x-6)} \geqslant 0;$$

$$\frac{2x^2+2x-12-3x^2+9x+12}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0.$$

$$\frac{-x^2+11x}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0;$$

1. Слева получили функцию, которую нельзя вычислить в токах 4, -1,-3 и 2. При этих значениях знаменатель обращается в нуль. Из числовой оси выкалываем эти точки, получаем рисунок *

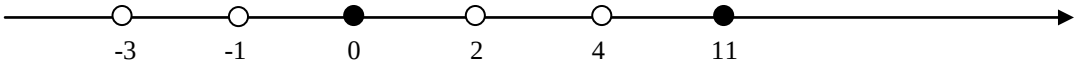
*



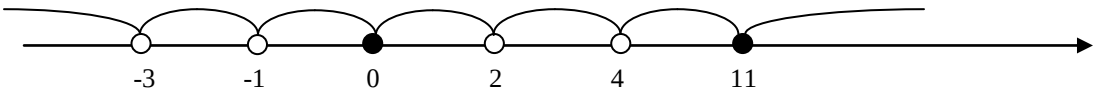
2. Приравниваем функцию к нулю и решаем полученное уравнение. Нас интересует: когда числитель равен 0. Поэтому $-x^2+11x=0$. Получаем: 0 и 11

3. Наносим корни на числовую ось и закрашиваем, так как неравенство нестрогое . Получаем рисунок **

**



4. Все нанесенные точки разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.



5. Берем любую точку из каждого промежутка и определяем знак функции на этом промежутке.

Самый правый промежуток: x=12 $\quad \frac{-12(12-11)}{(12-4)(12+1)(12+3)(12-2)} < 0$

Следующий промежуток: x=5 $\quad \frac{-5(5-11)}{(5-4)(5+1)(5+3)(5-2)} > 0$

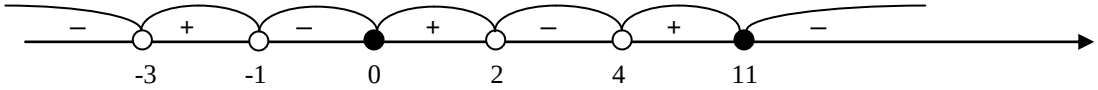
Следующий промежуток: x=3 $\quad \frac{-3(3-11)}{(3-4)(3+1)(3+3)(3-2)} < 0$

Следующий промежуток: x=1 $\quad \frac{-1(1-11)}{(1-4)(1+1)(1+3)(1-2)} > 0$

Следующий промежуток: x=-0,5 $\quad \frac{-0,5(0,5-11)}{(0,5-4)(0,5+1)(0,5+3)(0,5-2)} < 0$

Следующий промежуток: x=-2 $\quad \frac{-(-2)(-2-11)}{(-2-4)(-2+1)(-2+3)(-2-2)} > 0$

Следующий промежуток: x=-4 $$\frac{-(-4)(-4-11)}{(-4-4)(-4+1)(-4+3)(-4-2)} < 0$$



6. Выписываем ответ. Данному неравенству соответствуют промежутки, где значения больше нуля, т.е. стоит знак «+», при этом закрашенные точки - входят в решение, незакрашенные – не входят.

Ответ: $(-3;-1) \cup [0;2) \cup (4;11]$.

- ⚠ Обратите внимание, знаки «-» и «+» в данном случае чередуются, это потому, что каждый корень имеет нечетную кратность. **Если в разложении все множители разные** (корни разные), **и никакие множители не входят в четной степени** (например, $(x - 4)^4$), **то знаки «+» и «-»будут чередоваться**.
- ⚠ **Чередовать знаки просто так нельзя, так как может быть повтор знака, при переходе через корень, кратность которого четное число! Подробнее ищите информацию по теме: Кратность корней. Если вы не умеете определять кратность корня, то проверка знака функции на каждом промежутке, является обязательной!**